TEMA 4:

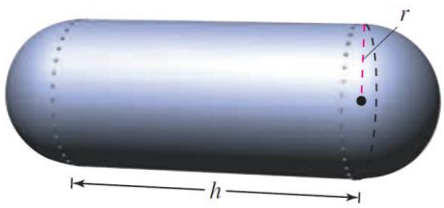
Cálculo diferencial en varias variables

FMIBII

Biomedical engineering degree

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

1. Un laboratorio farmacéutico está barajando la opción de utilizar nanopartículas de oro huecas (se supone despreciable el grosor de la capa de oro) con forma cilíndrica y extremos semiesféricos (tal y como puede verse en la figura) como sistemas de *drug-delivery* en una nueva terapia contra el cáncer.



   a. Deduzca el volumen de cada uno de los extremos semiesféricos a partir del volumen del sólido de revolución que se forma al girar con respecto al eje x la región limitada por la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ y los ejes de coordenadas del primer cuadrante (es decir, para $x \geq 0$ e $y \geq 0$).

   b. Sabiendo que el volumen cada nanopartícula puede calcularse sumando el volumen de las dos semiesferas que forman los extremos (utilice el resultado del apartado anterior) y el volumen del cilindro central ($V_{cilindro} = \pi r^2 h$), escriba este volumen como una función de las variables *h* y *r.*

   c. Deduzca el área lateral de la parte cilíndrica de la nanopartícula a partir de la figura (imagine el cilindro desplegado como si fuera un rectángulo).

   d. Si cada nanopartícula debe almacenar un volumen de medicamento de 1nm^3, determine el radio *r* y la longitud *h* que minimizan la cantidad de oro utilizado para fabricar cada una de las nanopartículas (utilice los datos necesarios de los apartados anteriores y tenga en cuenta además, que el área de la superficie de una semiesfera viene dada por $A_{semiesfera} = 2\pi r^2$).

e. ¿Es la forma de las nanopartículas elegida por el laboratorio farmacéutico la óptima para, tal y como se pide en el apartado anterior, minimizar la cantidad de oro utilizado? ¿Por qué? ¿Cuál sería la forma óptima de la nanopartícula en este caso?

f. Calcule las derivadas parciales de la función $V_{cilindro}$ (descrita en el apartado b) con respecto a *h* y con respecto a *r*. ¿Son estas derivadas parciales continuas? ¿Qué podría decir acerca de la diferenciabilidad de la función $V_{cilindro}$?

g. En caso de que sea posible, escriba la expresión del diferencial total de la función $V_{cilindro}$.

h. Demuestre que las dos derivadas parciales cruzadas (o mixtas) de la función $V_{cilindro}$ son iguales. Justifique esta igualdad.

2. Un equipo científico que se dedica a la reconstrucción de imágenes tridimensionales de resonancia magnética, está investigando el comportamiento de distintas funciones para utilizarlas en la identificación de planos tangentes a distintos tipos de superficies.

   a. La primera familia de funciones estudiada, es de la forma $z = x \cdot f\left(\frac{y}{x}\right)$. Considerando que *f* es una función derivable, demuestre que el plano tangente a cualquier punto *P* (x_0, y_0, z_0) de la superficie *z*, pasa por el origen.

   b. Además de la familia de funciones anterior, también están haciendo pruebas con hiperboloides de la forma: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

      i. Construya la función auxiliar $F(x, y, z) = 0$ y calcule su gradiente en el punto (x_0, y_0, z_0).

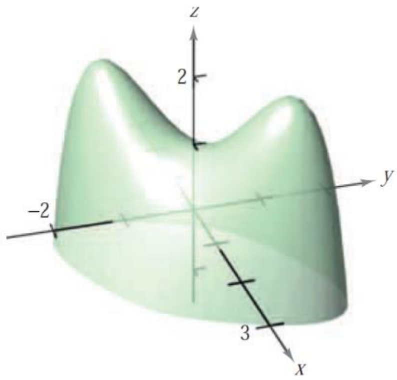
      ii. Demuestre que el plano tangente a la superficie hiperboloidal en dicho punto, puede expresarse la forma: $\frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} - \frac{z_o z}{c^2} = 1$.

      iii. ¿Cuál sería la expresión de la familia de rectas normales al plano tangente anterior que pasan por el punto (x_0, y_0, z_0) = (3, 4, 2)?

      iv. Si *a* = 3, *b* = 2 y *c* = 1, ¿cuál es el ángulo de inclinación del plano tangente al hiperboloide en el punto del apartado anterior?

3. Un centro especializado en prótesis óseas, trabaja en un nuevo modelo tridimensional para reconstruir un fragmento del húmero de un paciente. El modelo utilizado viene dado por la siguiente función:

$$z = 2xy - \frac{1}{2}(x^4 + y^4) + 1$$



a. Examine la función dada para localizar sus extremos relativos y sus puntos silla.

b. Considere ahora que las variables independientes son *x* y *z*. Calcule las derivadas parciales de *y* (que está expresada en función de x y de z de manera implícita) con respecto a *x* y con respecto a *z,* utilizando para ello dos métodos diferentes.

c. Se definen dos nuevas funciones *v(x,y)* y *w(x,y)*, a partir de las derivadas parciales obtenidas en el apartado anterior, siendo $v = \frac{\partial y}{\partial x}$ y $w = \frac{\partial y}{\partial z}$. ¿Cuál es el dominio de cada una de estas dos funciones? ¿Y su rango?

d. ¿Existe el límite cuando (*x*,*y*) → (0,0) de la función *v*? ¿Por qué? Justifique su respuesta.

4. Un *dron* equipado con un sistema de desfibrilación, que es capaz de acceder a zonas de difícil acceso en accidentes en carreteras de montaña, tiene una batería recargable basada en placas solares triangulares. La función que define la superficie de cada una de las placas solares (considerando únicamente el primer octante, es decir, $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $z \geq 0$) es la siguiente:

$$z = f(x, y) = 3 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}$$

a. Demuestre que la función $z = f(x,y)$ es diferenciable utilizando la definición de diferenciabilidad.

b. Esboce la gráfica de *f* y marque el punto (3, 2, 1) sobre la superficie.

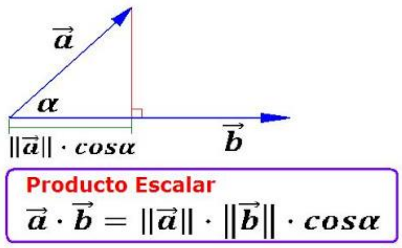
c. Calcule la derivada direccional de $f(x,y) = f(3,2)$ en la dirección del vector unitario ***u***, siendo $\theta = \pi/4$ el ángulo que forma dicho vector con el eje *x.*

d. Calcule la derivada direccional de $f(x,y) = f(3,2)$ en la dirección del vector ***v*** = - 3***i*** + 4***j.***

e. Halle la expresión de **grad** *f*(*x*,*y*).

f. Sabiendo que la derivada direccional de una función *f* en la dirección del vector unitario ***u*** se puede calcular como el producto escalar entre el gradiente de la función, **grad** f, y el vector unitario ***u*,** deduzca bajo qué condiciones obtenemos el valor máximo de la derivada direccional en un punto dado.

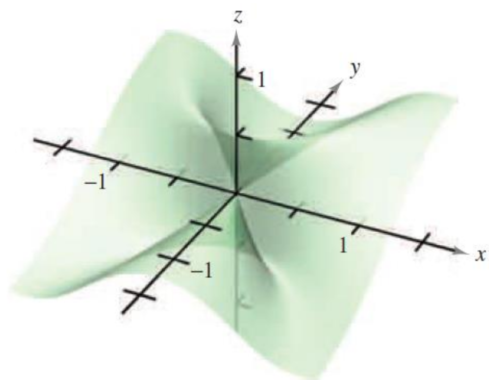
NOTA: El producto escalar de dos vectores se define como el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman



g. A partir de los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores, calcule el valor máximo de la derivada direccional de f en (3,2).

5. Se ha diseñado un modelo tridimensional de un injerto de piel de un paciente, que viene dado por la siguiente función:

$$z = f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$



a. Determine el dominio y el rango de la función f. Justifique su respuesta.

b. Determine (si existe), el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \rightarrow (0,0)$ a lo largo de la recta $y = ax$, siendo $a \neq 0$.

c. Determine (si existe), el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \rightarrow (0,0)$ a lo largo de la parábola $y = x^2$.

d. A partir de los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores, ¿podría decir si existe el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \rightarrow (0,0)$?

e. Teniendo en cuenta el análisis realizado, ¿qué podría decir sobre la continuidad de la función f en el punto (0, 0)? Justifique su respuesta.

6. Un programador de una empresa de análisis de imágenes médicas está probando distintos procesos para implementar algunos algoritmos que le permitan calcular fácilmente derivadas parciales.

   a. Sea $f(x,y) = \int_x^y \sqrt{1+t^3}\, dt$ ¿Cómo sería el proceso matemático, que luego el programador debería implementar en forma de algoritmo, para obtener $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ utilizando el segundo teorema fundamental del cálculo?

   b. En segundo lugar, el programador quiere implementar un algoritmo que permita calcular las primeras y segundas derivadas parciales de la función g, en el punto $(x,y) = (0,0)$, a partir de la correspondiente definición.

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Describa el proceso matemático que tendría que llevar a cabo el programador para posteriormente poder implementar su algoritmo, para ello:

      i. Calcule $g_x(x,y)$ y $g_y(x,y)$ para $(x,y) \neq (0,0)$

      ii. Demuestre que existen las derivadas parciales $g_x(0,0)$ y $g_y(0,0)$ utilizando la definición de derivadas parciales de la función *g(x,y)*

      iii. Utilizando de nuevo la definición de derivadas parciales (pero partiendo de las funciones $g_x(x,y)$ y $g_y(x,y)$), calcule $g_{xy}(0,0)$ y $g_{yx}(0,0)$.

      iv. A partir del resultado obtenido en el apartado anterior, ¿qué podría decir sobre la continuidad de $g_{xy}(0,0)$ y $g_{yx}(0,0)$?

   c. Finalmente, el programador, implementa un algoritmo para calcular las derivadas parciales en el punto $s = 3$, $t = \pi/2$ de una función w de dos variables (x e y) que dependen a su vez de otras dos (s y t).

$$w = x^2 - y^2$$

$$x = s\, cost$$

$$y = s\, sent$$

      i. Describa el proceso matemático que debería implementar el programador si quisiera resolver el problema utilizando la regla de la cadena.

      ii. Compruebe que el resultado obtenido en el apartado anterior es correcto utilizando un método distinto a la regla de la cadena.